Lösningar till diagnosprov i Matte 3 kap 3

1) $f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 8x^9 + 72x$

$f'(x) = 15x^2 + 14x - 72x^8 + 72$

$f'(-1) = 15 - 14 - 72 + 72 = 1 > 0 \Rightarrow$ Växande

2) $f(x) = 180e^x - e^{5x}$

$f'(x) = 180e^x - 5e^{5x}$

$f'(0{,}9) = 180 \cdot e^{0{,}9} - 5 \cdot e^{5 \cdot 0{,}9} = -7{,}36 < 0 \Rightarrow$ Avtagande

3) $f(x) = 0{,}5x^3 - 3x^2 + 2$

$f'(x) = 1{,}5x^2 - 6x = 0$

$x(1{,}5x - 6) = 0$: Nollproduktmetoden

$\boxed{x_1 = 0}$

$1{,}5x_2 - 6 = 0$

$1{,}5x_2 = 6$

$x_2 = \frac{6}{1{,}5} = 4$ $\boxed{x_2 = 4}$

$f''(x) = 3x - 6$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ $x_1 = 0$ är en maximipunkt.

$f''(4) = 12 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow$ $x_2 = 4$ är en minimipunkt.

x		0		4	
$f(x)$	↗	2	↘		↗
$f'(x)$	+	0	−	0	+

$f'(-1) = 1{,}5 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) =$
$= 1{,}5 + 6 = 7{,}5 > 0 \Rightarrow f(x)$ ↗

$f'(2) = 1{,}5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2$
$= 1{,}5 \cdot 4 - 12 = 6 - 12 =$
$= -6 < 0 \Rightarrow f(x)$ ↘

$f'(5) = 1{,}5 \cdot 5^2 - 6 \cdot 5 = \ldots > 0 \Rightarrow f(x)$ ↗

$f(x)$ växande för $x < 0$
$f(x)$ avtagande för $0 < x < 4$
$f(x)$ växande för $x > 4$

4)

x		-1		0	
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$(-1,3)$ Max.-punkt

$(0,2)$ Min.-punkt

5) $y = 3x^2 - 6x + 7$

$y' = 6x - 6 = 6(x-1) = 0$

$x = 1$ Extrempunkt

$y'' = 6 > 0 \Rightarrow x = 1$ Min.-punkt

$y(1) = 3 - 6 + 7 = 4$ $\qquad$ Min.-vårde $= 4$

6) "f(x) har maximipunkt i $(2,5)$" innebär:

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=5 \\ f'(2)=0 \\ f''(2)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Alternativ C)}$$

7) $V(t) = 0{,}02t^2 - 0{,}8t + 180$

$V'(t) = 0{,}04t - 0{,}8 = 0$

$0{,}04t = 0{,}8 \quad | \,/0{,}04$

$t = 20$ dagar

$V''(t) = 0{,}04 > 0 \Rightarrow$ Min.-punkt

$V(20) = 0{,}02 \cdot 20^2 - 0{,}8 \cdot 20 + 180 = 172$ kr

8) $K(x) = 0{,}05x^2 - 15x + 4125$

$K'(x) = 0{,}1x - 15 = 0$

$0{,}1x = 15$

$x = 150$

$K''(x) = 0{,}1 > 0$

$\Downarrow$

$x = 150$ Min.-punkt

9) $V(t) = 28 + 9t^2 + 48t - t^3$

$V'(t) = -3t^2 + 18t + 48 = 0$

$t^2 - 6t - 16 = 0$

$t_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+16}$

$= 3 \pm 5$

$\boxed{t_1 = 8}$

$t_2 = -2$; Förkastas eftersom antal månader inte kan vara negativt.

$V''(t) = -6t + 18$

$V''(8) = -6 \cdot 8 + 18$

$= -48 + 18$

$= -30 < 0$

$\Downarrow$

$t_1 = 8$ Max.-punkt

$V(8) = 28 + 9 \cdot 8^2 + 48 \cdot 8 - 8^3 = 476$: Max. vinsten är <u>476000 kr efter 8 månader</u>

10) $f(2) = 3$ och $f'(0) = 1 \Longrightarrow$ Graf A

$g(0) = -1$ och $g(x)$ växande $\Longrightarrow$ D

$h(0) = 1$ och $h'(2) = 0 \Longrightarrow$ E

Se graferna.

11) Intäkter: $I(x) = 4500x$

a) Kostnader: $K(x) = 8x^2 + 1400x + 26400$

Vinsten: $V(x) = 4500x - (8x^2 + 1400x + 26400)$

$= 4500x - 8x^2 - 1400x - 26400$

$= -8x^2 + 3100x - 26400$

$V'(x) = -16x + 3100 = 0$

$3100 = 16x$

$193{,}75 = x$

$\underline{x = 194}$

$V''(x) = -16 < 0$

$\Downarrow$

Max-punkt

b) $V(194) =$

$= -8 \cdot 194^2 + 3100 \cdot 194 - 26400 =$

$= \underline{273912 \text{ kr}}$

12) x = Höjningen av inträdesavgiften

I = Intäkter per månad

a) Antal gäster vid en höjning av inträdesavgiften på x kr : $10\,000 - 40x$

$$\underline{I(x) = (10\,000 - 40x)\cdot(120 + x)}$$

$$= 1\,200\,000 + 10\,000x - 4800x - 40x^2$$

$$= -40x^2 + 5200x + 1\,200\,000$$

b)

$$I'(x) = -80x + 5200 = 0$$

$$5200 = 80x$$

$$\underline{x = 65}$$

$I''(x) = -80$

< 0

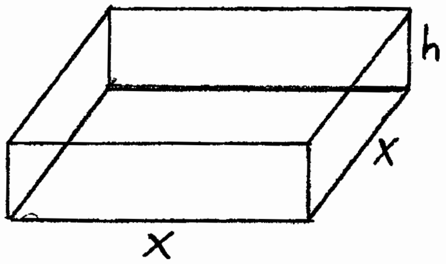
$\Downarrow$

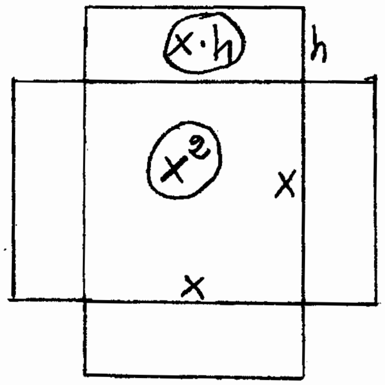
Max.

c) $I(65) = (10\,000 - 40\cdot 65)\cdot(120 + 65)$

$= \underline{1\,369\,000 \text{ kr}}$

13)





$V = x^2 \cdot h$

$V = \dfrac{x^2\cdot(550 - x^2)}{4x}$

$V = \dfrac{x(550 - x^2)}{4}$

$V(x) = \dfrac{x}{4}(550 - x^2)$

$V(x) = -\dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{550}{4}$

$x^2 + 4\cdot x\cdot h = 550 \text{ cm}^2$

$4xh = 550 - x^2$

$h = \dfrac{550 - x^2}{4x}$

$V'(x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{550}{4} = 0 \quad |\cdot 4$

13) (forts.)

$$-3x^2 + 550 = 0$$

$$550 = 3x^2$$

$$\frac{550}{3} = x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{550}{3}}$$

$V''(x) = -\frac{3}{2}x$

$V''\left(\sqrt{\frac{550}{3}}\right) < 0$

$\Downarrow$

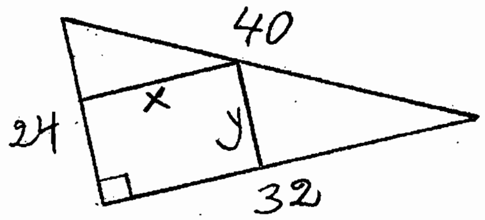
Max.

$$V\left(\sqrt{\frac{550}{3}}\right) = \dots = 1241,17 \text{ cm}^3$$

$$= 1,24117 \text{ dm}^3$$

(1 liter = 1 dm^3) Max. volym = 1,24 liter

14)



Likformighet:

$$\frac{y}{24} = \frac{32-x}{32}$$

$$y = \frac{24\cdot(32-x)}{32} = \frac{3}{4}(32-x)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 24$$

$A = x \cdot y$

$A(x) = x \cdot \left(-\frac{3}{4}x + 24\right)$

$= -\frac{3}{4}x^2 + 24x$

$A'(x) = -\frac{3}{2}x + 24 = 0$

$24 = \frac{3}{2}x$

$x = 16$

$\Downarrow$

$y = -\frac{3}{4}\cdot 16 + 24$

$y = -3\cdot 4 + 24$

$y = 12$

Staketet $= x + y = 16 + 12 = 28$ m

P.S.: $A''(x) = -\frac{3}{2}$

< 0

$\Downarrow$

$x = 16$ ger max. area A.

15) $P = 95 \cdot e^{-0,65t}$ $\begin{cases} P = \text{Blodtrycket i mm Hg} \\ t = \text{tiden i sek} \end{cases}$

a) $P = 95 \cdot e^{-0,65 \cdot 0,2} = 95 \cdot e^{-0,13} = \underline{83,42 \text{ mm Hg}}$

b) $P'(t) = 95 \cdot (-0,65) \cdot e^{-0,65t} = -61,75 \cdot e^{-0,65t}$

$P'(0,1) = -61,75 \cdot e^{-0,065} = -57,86 \approx \underline{-58} \text{ mm Hg/sek}$

c) Blodtrycket sjunker med 58 mm Hg per sekund efter 0,1 sek från att hjärtklaffarna börjat stängas.

d) $70 = 95 \cdot e^{-0,65t}$

$\frac{70}{95} = e^{-0,65t}$ $\quad | \ln(\cdot)$

$\ln\left(\frac{70}{95}\right) = -0,65t$

$t = \frac{\ln\left(\frac{70}{95}\right)}{-0,65} = 0,4698 \approx \underline{0,47 \text{ sek}}$